==

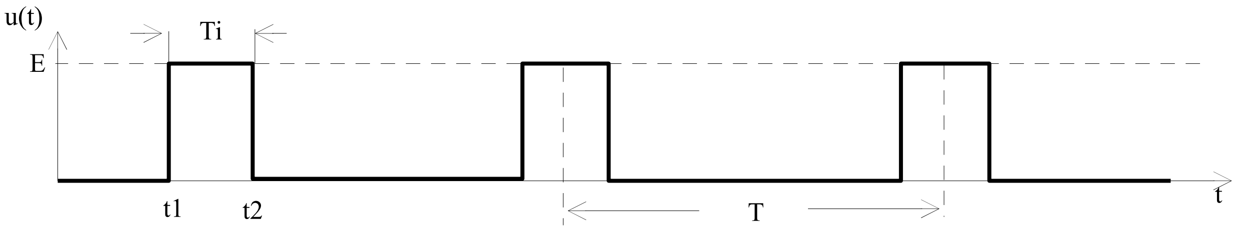
З А Д А Ч А N 1

Дана последовательность однополярных прямоугольных импульсов с амплитудой E [В] и длительностью T_i [c].
Период последовательности T кратен T_i.

Определите:
1. Уровень постоянной составляющей спектра последовательности U_o.
2. Амплитуду n-ой гармоники A_n.
3. Расстояние между соседними спектральными составляющими (вдоль оси частот) df.
4. Минимальный номер гармоники N_1, амплитуда которой равна нулю.
5. Значение частоты гармоники с минимальным номером N_1, амплитуда которой равна нулю.

==

Решение задачи:



Любая периодическая функция u(t) с периодом T может быть представлена рядом Фурье:

$$u(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)+b_n\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\right).$$

1. Постоянная составляющая последовательности определяется выражением:

$$U_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt ,$$

Так как за пределами интервала времени t_1- t_2 значения последовательности равны нулю, то пределы интегрирования можно изменить:

$$U_0=\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2} u(t)\,dt=\frac{E}{T}t\Big|_{t_1}^{t_2}=\frac{E}{T}(t_2-t_1)=\frac{E}{T}T_i .$$

2. Амплитуда n-ой гармоники определяется следующим образом:

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},$$

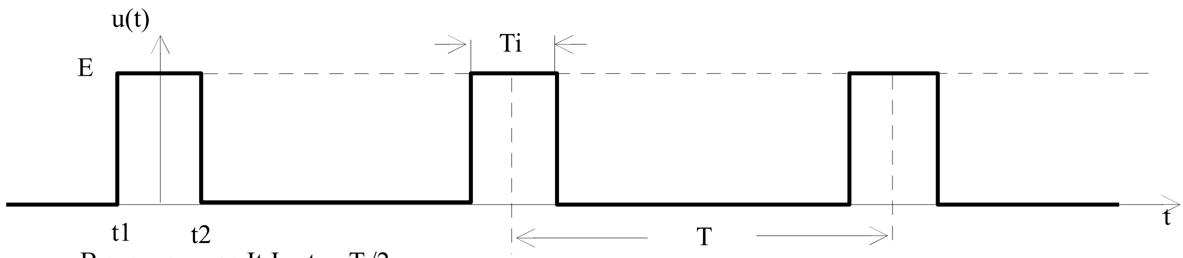
где a_n и b_n – коэффициенты ряда Фурье:

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt;$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt.$$

Если функция u(t) – четная, то коэффициенты b_n в ряде Фурье равны нулю.

Сместим ось времени в нашей последовательности так, чтобы она стала четной функцией:



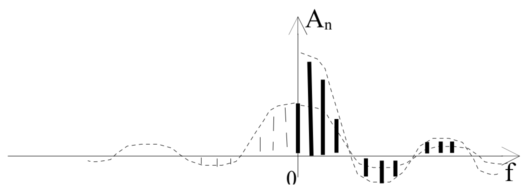
В этом случае $|t_1| = t_2 = T_i/2$.

$$A_n = a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T_i}{2}}^{\frac{T_i}{2}} E\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt = \frac{2E}{T}2\int_{0}^{\frac{T_i}{2}}\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt = \frac{2E}{T}2\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\Big|_0^{\frac{T_i}{2}}\frac{T}{n2\pi} = \frac{2E}{n\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{T}T_i\right)$$

Известно, что $\frac{\sin(x)}{x} = \mathrm{sinc}(x)$. Поэтому можно записать:

$$A_n = \frac{2ET_i}{T}\mathrm{sinc}\left(n\frac{\pi}{T}T_i\right).$$

Спектрограмма периодической последовательности прямоугольных импульсов



3. Так как $f_n = n/T$, то между соседними составляющими спектра расстояние по оси частот равно df =1/T [Гц].

4. $A_n = \frac{2E}{n\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{T}T_i\right)$. $A_n = 0$ при условии, что $\sin\left(n\frac{\pi}{T}T_i\right) = 0$, т. е. когда выполняется условие $n\frac{\pi}{T}T_i = k\pi$. Если k = 0, то n = 0 и имеет место отношение sin(0)/0, которое является неопределенностью, раскрываемой по правилу Лапиталя:

$$\frac{\sin(x)}{x}\Big|_{x=0} = \lim\Big|_{x\to 0}\frac{(\sin(x))'}{(x)'} = \cos(x)\Big|_{x=0} = 1.$$

С учетом этого $k \neq 0$. Следующее минимальное целое значение k = 1.

Тогда $n\frac{\pi}{T}T_i = \pi$ и $n = T/T_i$ (это скважность данной периодической последовательности прямоугольных импульсов).

5. Частота гармоники наименьшего порядка, у которой амплитуда равна нулю имеет следующее численное значение: $f_n = ndf = 1/T_i$.

Ответы:

1. $U_0 = \frac{ET_i}{T}$;
2. $A_n = \frac{2E}{n\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{T}T_i\right)$;
3. df = 1/T;
4. $n=T/T_i$;
5. $f_n=1/T_i$

З А Д А Ч А N 2

Видеоимпульс описывается функциональным выражением

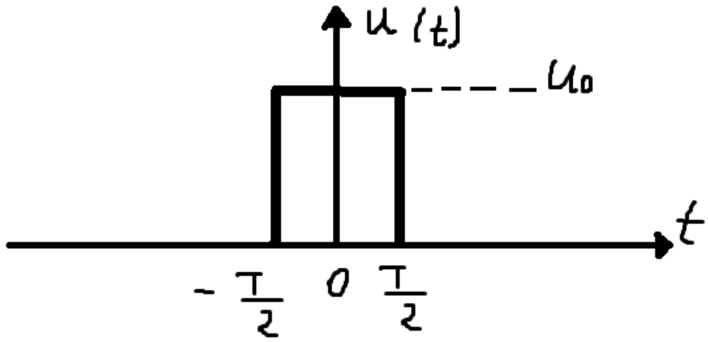
$$U(t) = U_o[\sigma(t + T/2) - \sigma(t - T/2)],$$

где $\sigma(t)$ - функция Хевисайда

Определите:

1. Спектральную плотность S(f) этого видеоимпульса на частоте f = 0.
2. Спектральную плотность S(f) этого видеоимпульса на частоте f = 1/(2T)
3. Укажите наименьшее значение частоты f_1, на которой спектральная плотность равна нулю.

Решение:



$$т.к.\, t+\frac{T}{2}=0,\, t_1=\frac{-T}{2}$$

$$t-\frac{T}{2}=0,\, t_2=\frac{T}{2}$$

Формула для вычисления спектральной плотности:

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t}\,dt,$$

где ω - цикл частоты, $\omega=2\pi f$.

Так как вне интервала $\left(\frac{-T}{2},\frac{T}{2}\right)$ U(t) =0, то изменим пределы интегрирования:

$$S(\omega)=\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)e^{-j\omega t}\,dt=\frac{U_0}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}}=\frac{U_0}{-j\omega}\left(e^{-j\omega\frac{T}{2}}-e^{-j\omega\frac{T}{2}}\right)=\text{¿}$$

$$\text{¿}\,\frac{2U_0}{\omega}\left(e^{j\omega\frac{T}{2}}-e^{-j\omega\frac{T}{2}}\right).$$

По формуле Эйлера:

$$\sin\varphi=\frac{e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}}{2j}$$

$$S(\omega)=\frac{2U_0}{\omega}\sin\left(\omega\frac{T}{2}\right)=\text{¿}\,подставим\,\omega=2\pi f=\text{¿}$$

$$S(f)=\frac{2U_0}{2\pi f}\sin\left(2\pi f\frac{T}{2}\right)=\frac{U_0}{\pi f}\sin(\pi f T).$$

1) При f=0 S(t)=0/0 – неопределенность. При x->0 sinx = x по свойству эквивалентных БМФ:

$$S(0)=\frac{U_0\pi f\,T}{\pi f}=U_0T.$$

2)

$$S(f)T=\frac{1}{2T}=\frac{2U_0T}{\pi}\sin\left(\frac{\pi_1}{2\pi}T\right)=¿\frac{2U_0T}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2U_0T}{\pi}.¿$$

3)

$$S(f_{min})=0$$

$$\frac{U_0}{\pi f_{min}}\sin(\pi f_{min}T)=0$$

Мы имеем 2 варианта:

а) $f_{min}=0$, что не верно, т.к. по 1) $S(0)=U_0T$.

б) $\sin(\pi f_{min}T)=0$

$\pi f_{min}T=\pi$

$f_{min}T=1$

$f_{min}=\frac{1}{T}$

$$f_{min}=\frac{1}{T}$$

Ответы:

$1. S(0)=U_0T;$

$2. S\left(\frac{1}{2T}\right)=\frac{2U_0T}{\pi};$

$3. f_{min}=\frac{1}{T}$

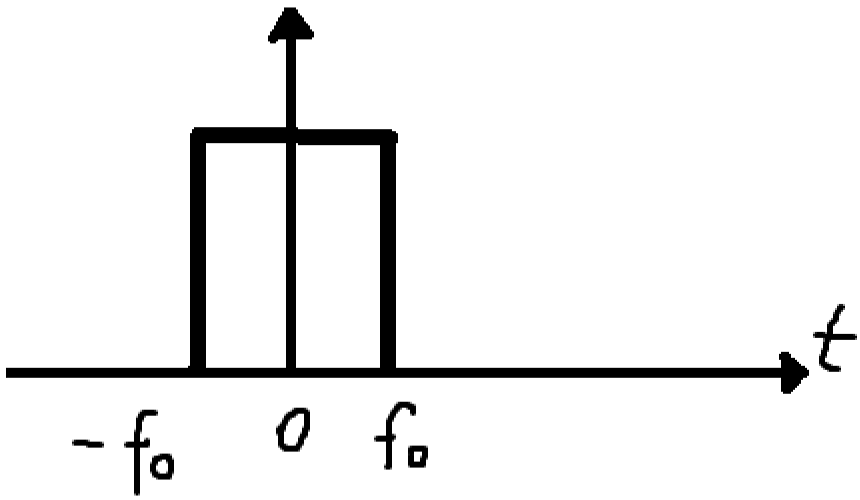
<u>З А Д А Ч А N 3</u>

Модуль спектральной плотности импульсного сигнала представляет собой
П-образную функцию частоты с уровнем S_o [В/Гц] в пределах от $-F_o$ до $+F_o$ [Гц] и равную нулю за пределами этого интервала частот.
Фазовый спектр этого импульсного сигнала равен нулю.

Определите:
1. Максимальное значение импульсного сигнала U_{max}.
2. Длительность T_i импульсного сигнала, которая оценивается интервалом времени между двумя его минимальными значениями, одно из которых предшествует максимуму, а второе следует за максимумом.
3. Значение импульсного сигнала на расстоянии $t = T_i / 4$ от его максимума.

==

Решение:



Формула ОПФ:

$$S(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} s(\omega)e^{-j\omega t}d\omega$$

Так как S(t)=0 вне интервала $(-F_0, F_0)$, изменим пределы интегрирования.

$$S(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-F_0}^{F_0} s(\omega)e^{-j\omega t}d\omega=\frac{S_0}{2\pi}\cdot\frac{1}{jt}e^{j\omega t}\ \begin{matrix}F_0\\-F_0\end{matrix}=¿$$

$$¿\frac{S_0}{2\pi jt}\left(e^{jF_0}-e^{-jF_0}\right)$$

По формуле Эйлера:

$$\sin\varphi=\frac{e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}}{2j},$$

Получим:

$$S(t)=\frac{S_0}{\pi t}\sin\ (2\pi F_0 t)$$

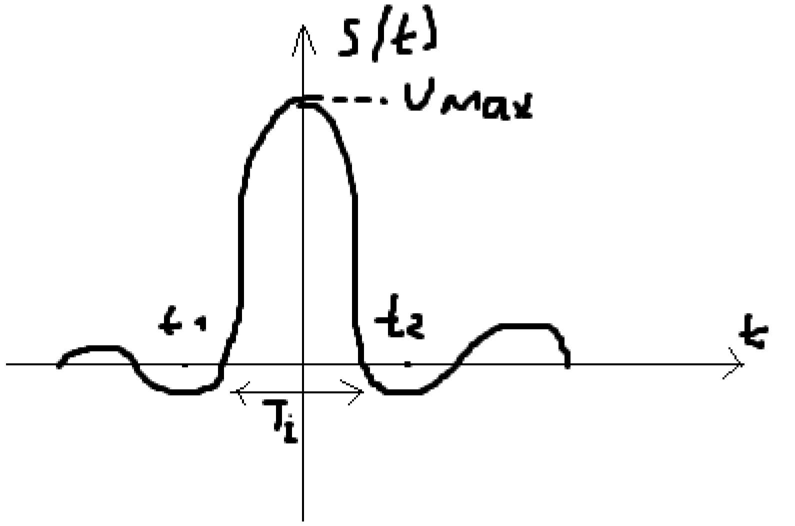
Приведём к виду sinC-функции :

$$2S_0F_0 sinc(2\pi F_0 t)$$

1) Значение sinc-функции максимально в точке t=0, поэтому по правилу Лапиталя заменим $sinc(2\pi F_0 t)$ на $2\pi F_0 t$.

$$\frac{\sin(2\pi F_0 t)}{2\pi F_0 t} = \lim 2\pi F_0 t = 0 = \frac{(\sin(2\pi F_0 t))'}{(2\pi F_0 t)'} = \cos(2\pi F_0 t) = \text{¿}$$

$$\text{¿} > U_{max} = 2S_0 F_0.$$



2) $T_i = t_2 - t_1$, т.к. в точках $t_2 \wedge t_1$ sinc=0 (минимум)

$$sinc(2\pi F_0 t) = 0 = \text{¿}\, 2\pi F_0 t - \pm \pi\,, где\ 2\ случая:$$

а) $2\pi F_0 t_1 = -\pi$,

$t_1 = \frac{-1}{2F_0}$

б)$2\pi F_0 t_1 = \pi$,

$t_2 = \frac{1}{2F_0}$

$$T_i = t_2 - t_1 = \frac{1}{2F_0} - \left(\frac{-1}{2F_0}\right) = \frac{1}{F_0}$$

3)

$$S\left(t = \frac{T_i}{4}\right) = \frac{4S_0}{\pi T_i} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Из пункта 2) $T_i = \frac{1}{F_0} = \text{¿}$

$$S\left(\frac{T_i}{4}\right) = \frac{4S_0 F_0}{\pi T_i} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4S_0 F_0}{\pi}$$

Ответы:

1. $U_{max} = 2S_0 F_0$;
2. $T_i = \frac{1}{F_0}$;
3. $S\left(\frac{T_i}{4}\right) = \frac{4S_0 F_0}{\pi}$

==

З А Д А Ч А N 4

Вольт-амперная характеристика диода $I_g(U_g)$ [mA] аппроксимирована кусочно-линейной функцией :

$$I_g = K \cdot U_g \text{ для } U_g > 0;$$
$$I_g = 0 \quad \text{ для } U_g \le 0.$$

На диод подано смещение U_o [B] и гармоническое колебание с амплитудой A [B].

Определите:

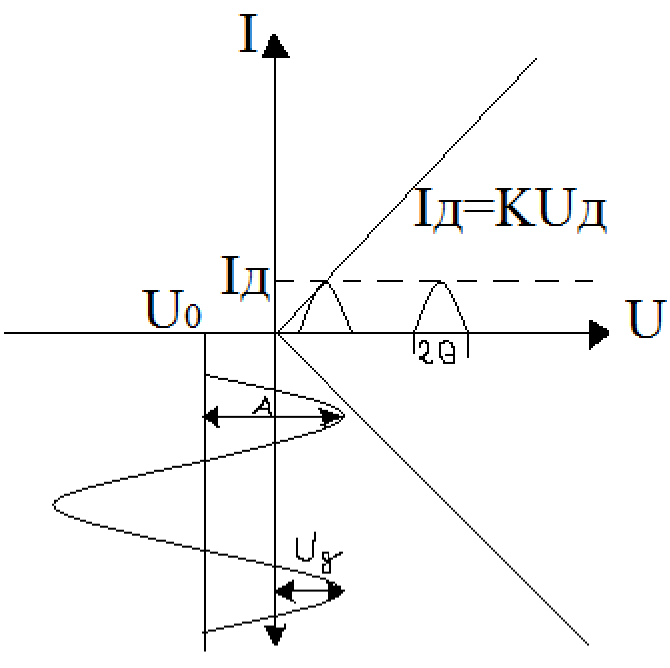
1. Амплитуду косинусоидальных импульсов тока диода I_m [mA].
2. Угол отсечки косинусоидальных импульсов тока диода Q [радиан].
3. Амплитуду 1-ой гармоники косинусоидальных импульсов тока диода I_1 [mA].

Формулы для расчета коэффициентов Берга:

$$\gamma_1(Q) = (Q - \sin(Q) \cdot \cos(Q)) / \pi \qquad \alpha_1(Q) = \gamma_1(Q) / (1 - \cos(Q))$$

Решение:

1. Отрицательное смещение: U_0<0



1) Для Uд>0 Iд=KUд; где $U\partial = A - |U_0|, т.е.\ I_m = K(A - |U_0|)$.

2) Зависимость между θ и U_0 определяется как $|U_0| = A\cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{|U_0|}{A}$$

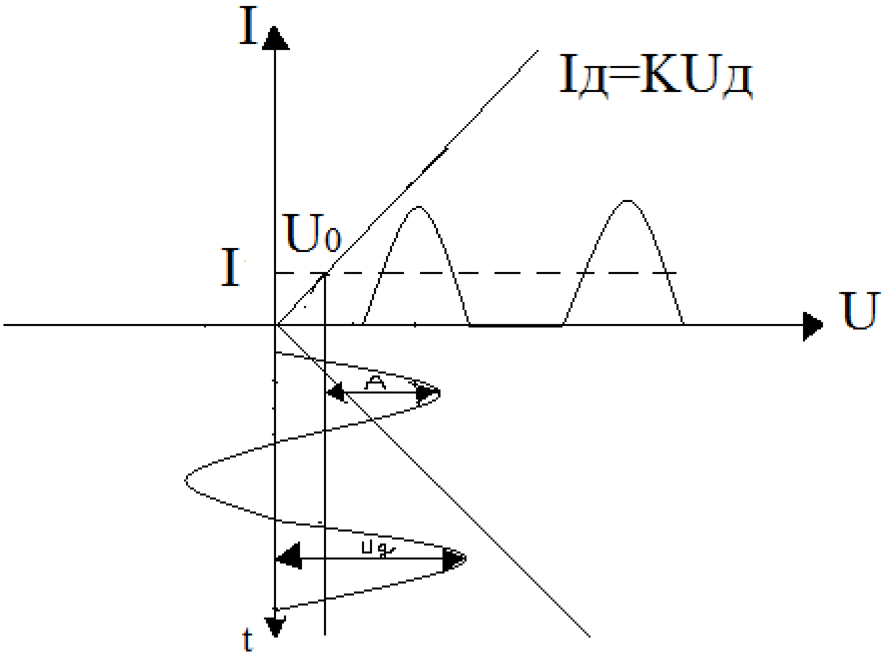
$$\theta = \arccos\left(\frac{|U_0|}{A}\right)$$

3) Для определения амплитуды 1-й гармоники воспользуемся коэффициентом Берга 1-го порядка:

$$\alpha_1 = \frac{\theta - sin\theta cos\theta}{\pi(1 - cos\theta)}$$

$$I_1 = \alpha_1 I_m \frac{(\theta - sin\theta cos\theta)}{\pi(1 - cos\theta)}$$

2. Положительное смещение диода: $U_0 > 0$



1) $U\partial = A + |U_0|$, $т.е. I_m = K(A + |U_0|)$.
2) $-|U_0| = A\cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{-|U_0|}{A}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{-|U_0|}{A}\right)$$

3)

$$I_1 = \alpha_1 I_m \frac{(\theta - sin\theta cos\theta)}{\pi(1 - cos\theta)}$$

Ответы:

1. $I_m = K(A \pm |U_0|)$;

2. $$\theta = \arccos\left(\frac{\pm|U_0|}{A}\right);$$

3. $$I_1 = \alpha_1 I_m \frac{(\theta - sin\theta cos\theta)}{\pi(1 - cos\theta)}.$$

===

З А Д А Ч А   N 5

Несущая сигнала с амплитудой A_{10} [В] и с частотой f_o [Гц] модулирована
по амплитуде гармоническим колебанием низкой частоты F [Гц].
Коэффициент модуляции равен M_1. Это колебание подано на вход одноконтурного резонансного усилителя с коэффициентом усиления К, настроенного на частоту несущей сигнала.
На выходе усилителя имеет место амплитудно-модулированное колебание с коэффициентом модуляции $M_2 = 0.707 \cdot M_1$.

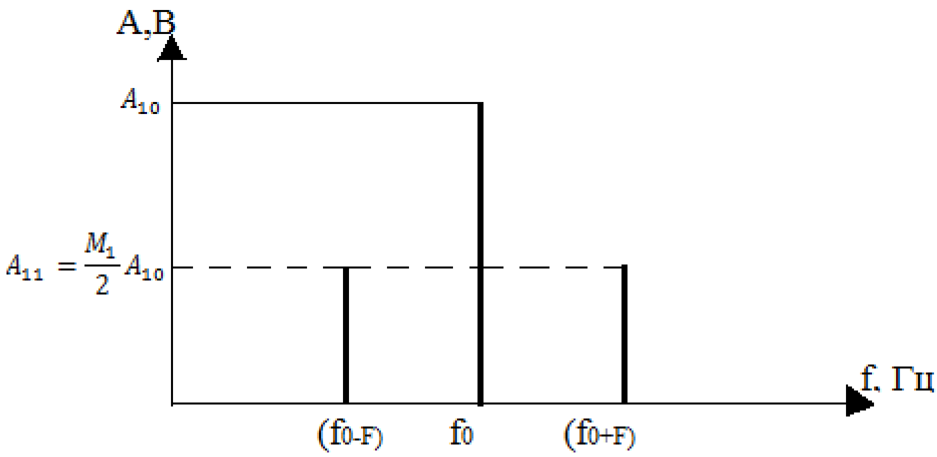
Определите:
1. Амплитуду боковой спектральной составляющей на входе усилителя A_{11}.
2. Амплитуду несущей на выходе усилителя A_{20}.
3. Амплитуду боковой спектральной составляющей на выходе усилителя A_{21}.
4. Добротность резонансного контура усилителя Q.

===

РЕШЕНИЕ:
В спектре амплитудно-модулированных колебаний сигнала содержится 3 спектральных составляющих:
- одна распределена на частоте несущей f_0 и имеет амплитуду несущего колебания A_{10};
- две другие (боковые) расположены слева и справа от частоты несущего колебания на расстоянии, равном частоте модулирующего колебания F и имеют амплитуду:

$$\frac{M_1}{2} A_{10}$$

$$A_{11} = \frac{M_1}{2} A_{10}$$

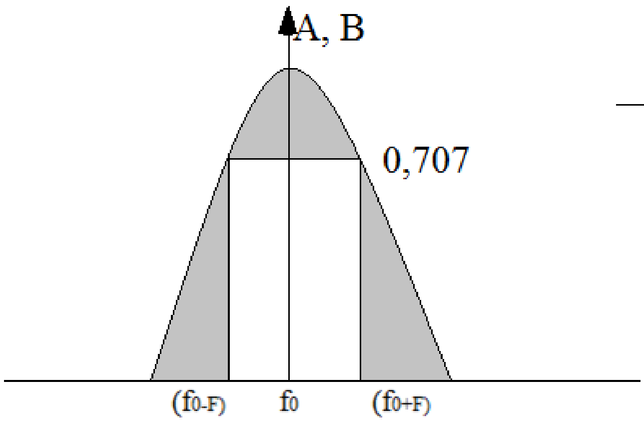


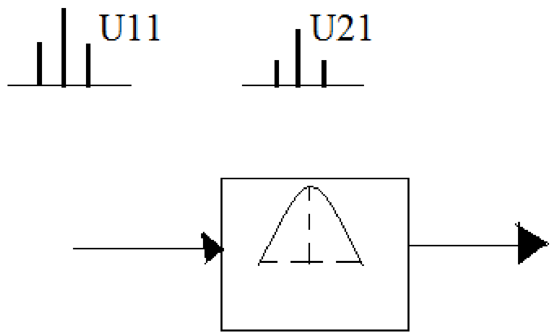
1. Коэффициент усиления усилителя равен K. Тогда A_{20} соответственно:

$$A_{20} = K\,A_{10}$$

2. Амплитуды боковых спектральных составляющих на выходе зависят от коэффициента амплитудной модуляции на выходе, который равен: $M_2 = 0{,}707\,M$ и амплитуды несущей на A_{20}:

$$A_{21} = \frac{M_2}{2}\,A_{20} = \frac{0{,}707\,M}{2}\,K\,A_{10}$$





$$K = \frac{U_{21}}{U_{11}} = 0{,}707.$$

Для определения добротности воспользуемся формулой:

$$Q = \frac{f_{рез}}{\Delta f_{эфф}} = \frac{f_0}{2\Delta f}$$

Где f_0 - частота несущей, $2\Delta f$ - полоса пропускания.

$$2\Delta f = (f_0 + \Delta f) - (f_0 - \Delta f) = 2F = ¿\,Q = \frac{f_0}{2F}.$$

Ответ:

1)
$$A_{11} = \frac{M_1}{2}\,A_{10}$$
2)
$$A_{20} = K\,A_{10}$$
3)
$$A_{21} = \frac{0{,}707\,M}{2}\,K\,A_{10}$$
4)
$$Q = \frac{f_0}{2\Delta f}$$

===

З А Д А Ч А N 6

Фильтр нижних частот (ФНЧ) имеет П-образную амплитудно-частотную характеристику, которая равна K_a во всей полосе пропускания частот от $-F_o$ до $+F_o$ [Гц]. Будем считать, что фазо-частотная характеристика $\Phi(\omega)$ этого идеализированного фильтра линейно зависит от частоты:

$$\Phi(\omega) = -K_ф \cdot \omega$$

На вход этого фильтра подается короткий импульс $u(t) = U_o \cdot \delta(t)$,
где $\delta(t)$ - функция Дирака.

Определите:

1. Максимальное значение сигнала U_{max} на выходе ФНЧ.
2. Длительность T_i сигнала на выходе ФНЧ, которая оценивается интервалом времени между двумя его минимальными значениями, одно из которых предшествует максимуму, а второе следует за максимумом.
3. Значение импульсного сигнала на расстоянии $t = T_i / 4$ от его максимума.
4. Время задержки $T_з$ местоположения U_{max} сигнала на выходе ФНЧ по отношению к моменту воздействия дельта-импульса на его входе.

===

Решение:

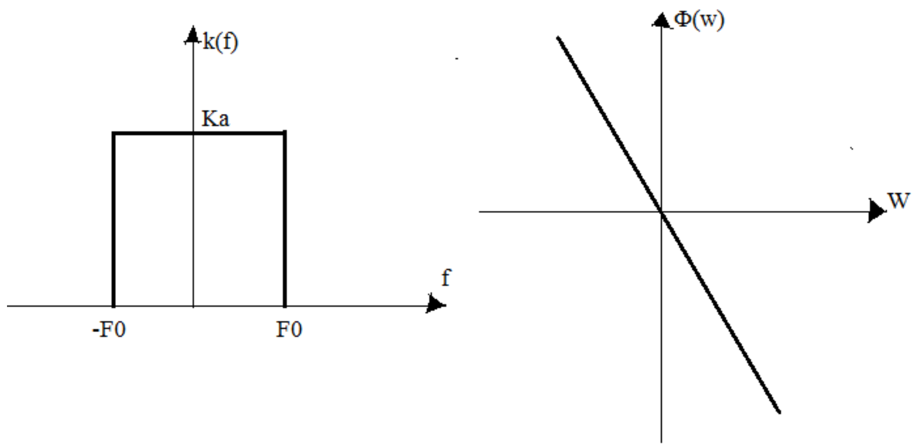


Рисунок – АЧХ и ФЧХ сигнала

Сигнал на выходе Sвых(t) находится:

$$S_{вых}(t) = S_{вх} k(j\omega)$$

Чтобы найти $S_{вх}$ воспользуемся фильтрующим свойством -функции:

Если непрерывную функцию умножить на -функцию и проинтегрировать её по времени, то мы получим значение функции в точка, где сосредоточен δ-импульс:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\,dt = f_0$$

δ – обобщённая функция, позволяющая описать точечное воздействие, а также пространственную плотность физических величин.

В нашем случае:

$$S_{вых}(j\omega) = S_{вх}(j\omega)\,k(j\omega)$$

$$S_{вх}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_0 \delta(t) e^{-j\omega t}\,dt = U_0 e^0 = U_0$$

$$k(j\omega) = k_a e^{j\varphi(\omega)}$$

1. Применим обратное преобразование Фурье (ОПФ) для восстановления сигнала:

$$S(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{-j\omega t}\,d\omega$$

Изменим предел интегрирования и подставим известные величины:

$$S(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U_0 k_a e^{-k_\phi j\omega} e^{-j\omega t}\,d\omega = \frac{U_0 k_a}{2\pi}\int_{-F0}^{F0} U_0 k_a e^{-k_\phi j\omega} e^{-j\omega t}\,d\omega = ¿¿$$

$$¿\,\frac{U_0 k_a}{2\pi}\frac{1}{j(t-k_\phi)} e^{j\omega(t-k_\phi)}\Big|_{-F0}^{F} = \frac{U_0 k_a}{j2\pi(t-k_\phi)}\left(e^{j2\pi F0(t-k_\phi)} - e^{-j2\pi F0(t-k_\phi)}\right)$$

Применим формулу Эйлера:

$$sin\varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$$

$$S(t) = \frac{U_0 k_a}{\pi(t-k_\phi)}\sin\left(2\pi F\,0(t-k_\phi)\right)$$

Приведём к sinc-функции:

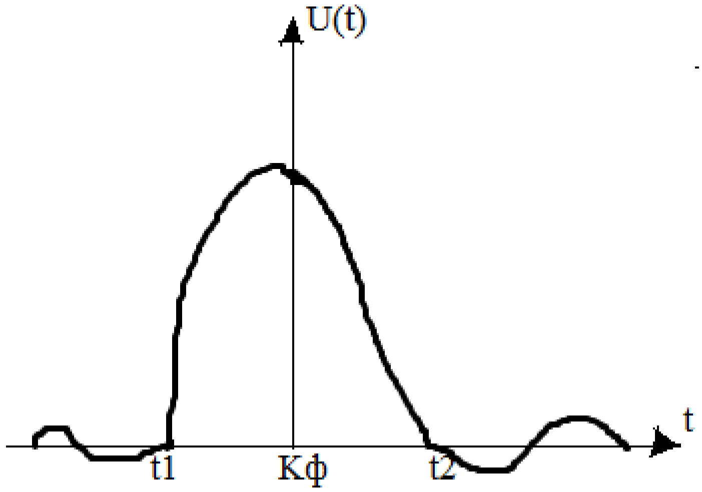
$$S(t) = 2F\,0\,U_0 k_a\, sinc\left(2\pi F0(t-k_\phi)\right)$$

Максимальное значение $U_{вых}(t)$ будет в том случае, если $t \to k_\phi$. Следовательно, возникает неопределённость вида sinc(φ) при φ⇒0 = 0/0.

Раскрываем по правилу Лапиталя:

$$\frac{\sin\left(2\pi F\,0(t-k_\phi)\right)}{2\pi F0(t-k_\phi)} = cos\,2\pi F\,0\left|t-k_\phi\right| = 1 \Rightarrow U_{max} = 2F\,0\,U_0 k_a$$

2. В точках t1 и t2 sinc-функция равна нулю. Ti = t2-t1



$$2\pi F0\left(t-k_{\phi}\right)=\pm\pi k\,,\;где\; k=(1,2,5)$$

А)

$$2\pi F0\left(t2-k_{\phi}\right)=\pi$$

$$t2=\frac{1}{2F0}+k_{\phi}$$

Б)

$$2\pi F0\left(t1-k_{\phi}\right)=\pi$$

$$t2=\frac{-1}{2F0}+k_{\phi}$$

$$T_i=t2-t1=\frac{1}{2F0}+k_{\phi}+\frac{1}{2F0}-k_{\phi}=\frac{1}{F0}$$

3.

$$U_{вых}\left(K_{\phi}+\frac{T_i}{4}\right)=\frac{U_0k_a}{\pi\left(k_{\phi}+\frac{T_i}{4}-k_{\phi}\right)}\sin\left(2\pi F0\left(k_{\phi}+\frac{T_i}{4}-k_{\phi}\right)\right)$$

Из пункта 2:

$$T_i=\frac{1}{F0}$$

Следовательно:

$$U_{вых}\left(K_{\phi}+\frac{T_i}{4}\right)=\frac{4U_0k_aF0}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{4U_0k_aF0}{\pi}$$

4.

$$-t3=\frac{d\varphi}{d\omega}=\frac{d\left(-K_{\phi}\omega\right)}{d\omega}=\frac{K_{\phi}d\omega}{d\omega}=-K_{\phi}$$

Ответ:

1.

$$U_{max}=2F0U_0k_a$$

2.

$$T_i=\frac{1}{F0}$$

3.

$$U_{вых}\left(K_ф+\frac{T_i}{4}\right)=\frac{4U_0k_aF0}{\pi}$$

4.

$$t3=K_ф$$

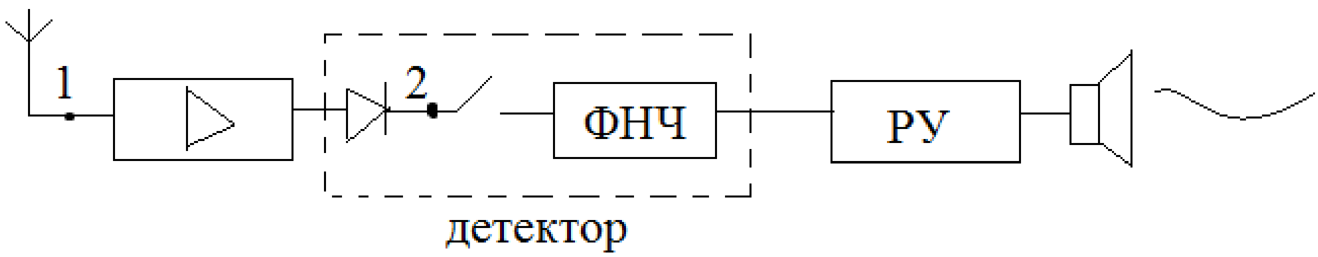
===

З А Д А Ч А N 7

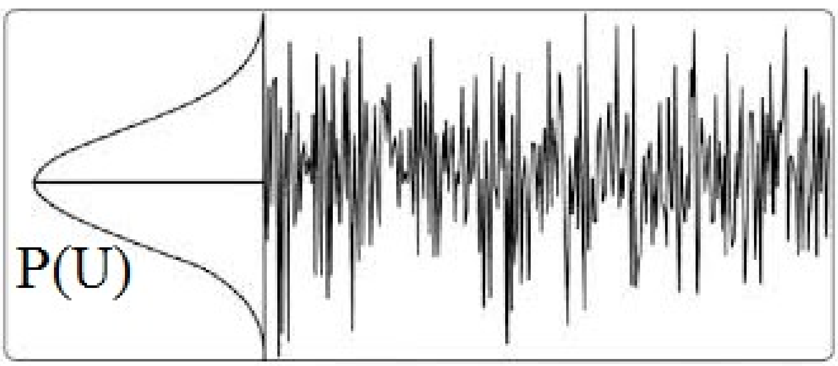
Сигнальное устройство представляет собой высокочастотный усилительный тракт, линейный двухполупериодный детектор, решающее устройство и звуковой индикатор. Если на выходе линейного детектора напряжение U(t) превышает порог U_o, который имеет решающее устройство, то возникает звуковой сигнал тревоги.
В дежурном режиме на входе усилительного тракта присутствует гауссовский шум. При этом на выходе линейного детектора напряжение имеет распределение Рэлея:

$$p(U) = (U / s^2)\cdot \exp(-U^2/(2 \cdot s^2));$$

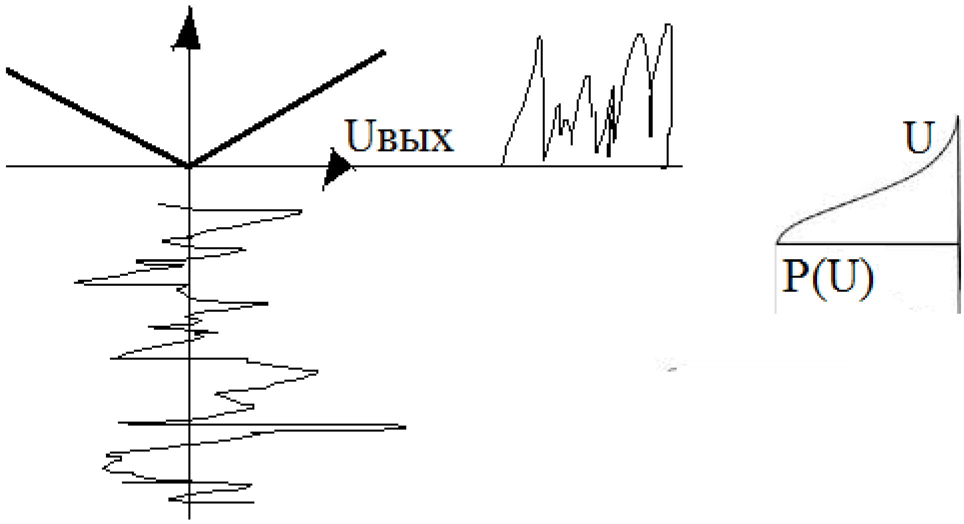
Определите вероятность того, что в заданный момент времени при работе сигнального устройства в дежурном режиме возникнет сигнал ложной тревоги $P_{лт}$.
===
Решение: на выходе усилительного тракта (в точке 1) присутствует гауссовский шум:



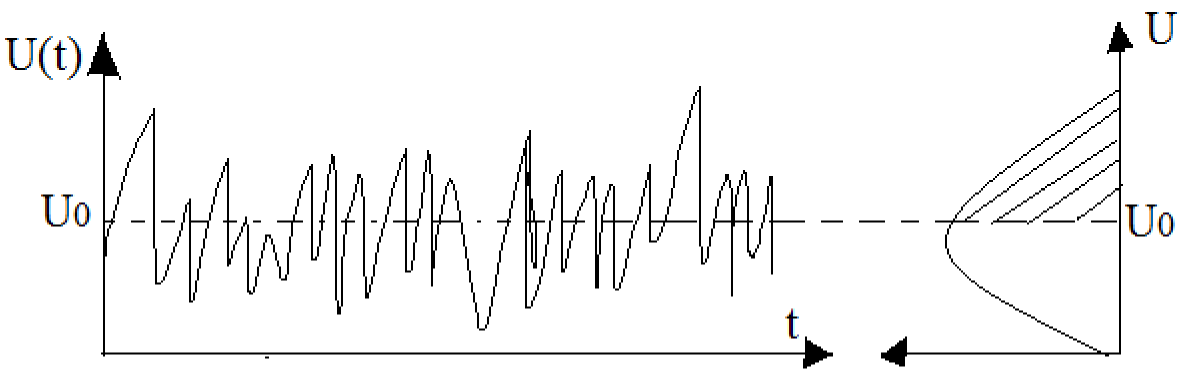
Он имеет нормальное распределение:



В точке 2 все значения U>0 отсекаются и имеет место одностороннее нормальное распределение:



После ФНЧ сигнал имеет распределение Релея:



Сигнал тревоги срабатывает при U(t)>U_0. Следовательно, чтобы найти вероятность ложной тревоги, нужно найти площадь заштрихованной фигуры на графике распределения Релея, то есть:

$$P_{лт}=\int_{U_0}^{\infty} P(U)\,dU=\text{¿}\int_{U_0}^{\infty}\frac{U}{S^2}\exp\left(\frac{-U^2}{2S^2}\right)dU\,\text{¿}$$

С учётом:

$$d\left(\frac{U^2}{2S^2}\right)=\frac{2U\,dU}{2S^2}=\frac{U\,dU}{S^2}$$

Получим:

$$P_{лт}=\int_{U_0}^{\infty}\frac{U}{S^2}\exp d\left(\frac{-U^2}{2S^2}\right)=-\left(\exp\left(\frac{-U^2}{2S^2}\right)\right)\Big|_{U_0}^{\infty}=\lim_{U\to\infty}-(e)^{-U^2/2S^2}=\exp\left(\frac{-U_0^2}{2S^2}\right)$$

Ответ: $P_{лт}=\exp\left(\frac{-U_0^2}{2S^2}\right)$

З А Д А Ч А   N 8

Амплитуда несущего колебания на выходе передатчика равна U_o [В].
На передатчике осуществляется частотная модуляция гармоническим колебанием.
При этом мгновенная частота сигнала изменяется по закону

$$f(t) = f_o + \Delta F \cdot \cos(2\pi F t + \theta),$$

где f_o - частота несущего колебания,
ΔF - девиация частоты,
F - частота модулирующего колебания,
θ- начальная фаза модулирующего колебания.
Определите амплитуду A_o компонента спектра колебания на выходе передатчика на частоте несущей, а также амплитуду 1-ой составляющей верхней A_{1h} (или нижней A_{1l}) боковой частоты .
==

Решение: сигналы с угловой модуляцией описываются выражением:

$$U(t)=A_0 cos\varphi(t),$$

Где

$$\varphi(t)=\int_0^t 2\pi f(t)\,dt$$

В данном случае:

$$f(t)=f_0+dFcos(2\pi FT+\theta).$$

Найдём $\varphi(t)$:

$$\varphi(t)=\int_0^t 2\pi f_0(t)\,dt+\int_0^t 2\pi\, dF\cos(t)(2\pi FT+\theta)\,dt=¿¿$$

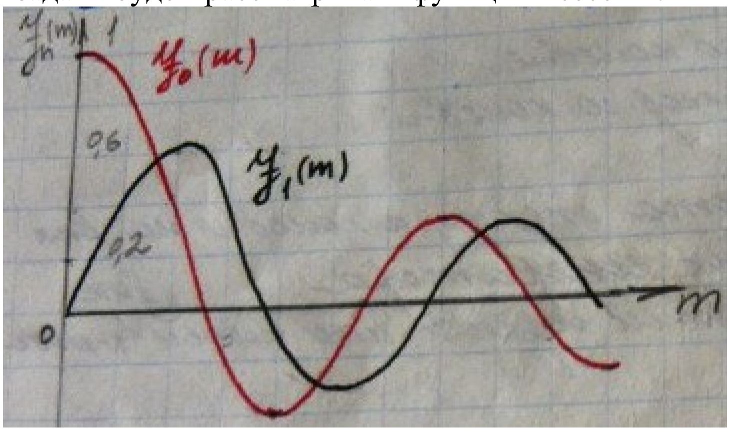
$$¿2\pi f_0(t)+2\pi dF\frac{1}{2\pi F}\left(\sin(2\pi FT+\theta)\right)\Big|_0^t=2\pi f_0 t+\frac{dF}{F}\sin(2\pi FT+\theta),$$

$$\frac{dF}{F}=m-индекс\ модуляции.$$

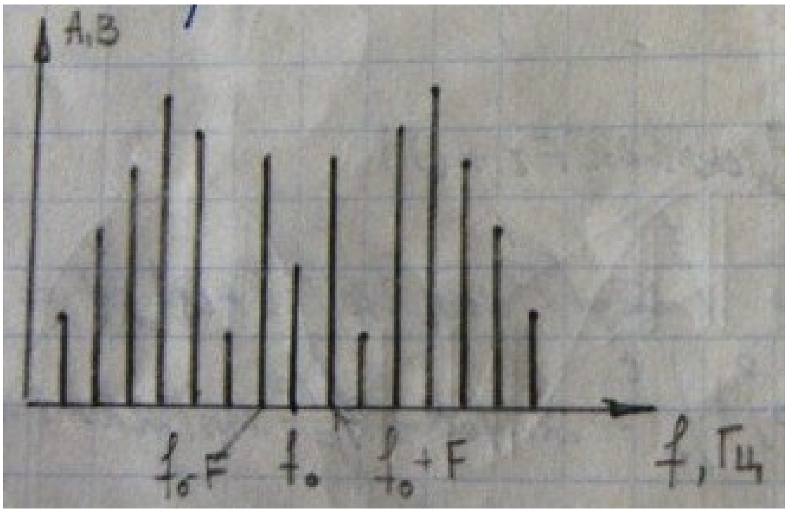
$$U(t)=U_0\cos\left(2\pi f_0 t+\frac{dF}{F}\sin(2\pi f\,T+\theta)\right)=¿$$

$$¿U_0¿$$

Так как обе функции периодические, они могут быть представлены в виде рядов Фурье, полученных в теории функции Бесселя.
Следовательно, амплитуда n-й составляющей спектра ЧМ-сигнала по отношению к нулевому компоненту на частоте f_0 равна произведению амплитуды несущего колебания U_0 на функцию Бесселя соответствующего порядка.
В условии данной задачи будем рассматривать функции Бесселя 0 и 1 порядков.



Спектр ЧМ-сигнала:



$$\Delta f = \frac{1}{T} = F \, ; f_n = nF$$

$$1.\ A_0 = U_0 \gamma_0 (m)$$

$$2.\ A(f_n - F) = A(f_0 + F) = U_0 \gamma_1 (m)$$

Ответ:

$$1.\ A_0 = U_0 \gamma_0 (m)$$

$$2.\ A(f_n - F) = A(f_0 + F) = U_0 \gamma_1 (m)$$

<u>З А Д А Ч А N 9</u>

Амплитудно-модулированное колебание вида

$$s_1(t) = A_o(1 + M \cdot \cos(2\pi Ft)) \cdot \cos(\omega t)$$

подано на квадратичный детектор с характеристикой

$$U_{вых} = K \cdot (U_{вх})^2.$$

Определите на выходе этого детектора уровень постоянного напряжения U_{2o} и амплитуды A(F) и A(2F) составляющих спектра с частотами соответственно F и 2F.

<u>Решение:</u>

Определим $U_{вых}$:

$$U_{вых} = K\,U_{вх}^2 = K\,S^2(t) = K\,A_0^2\left(1 + M\cos(2\pi Ft)\right)^2 \cos^2(\omega t) = ¿$$

$$¿\,K\,A_0^2\left(1 + M\cos(2\pi Ft)\right) + M^2\cos^2(2\pi Ft)\cos^2(\omega t)$$

По формуле понижения степени:

$$U_{вых} = K\,A_0^2\left(1 + 2M\cos(2\pi Ft)\right) + \frac{M^2}{2}\left(1 + \cos(4\pi Ft)\right)¿\cos^2(\omega t)$$

$$\left|\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2\omega t)\right)\right|$$

– т.к. этот множитель даёт высокочастотные составляющие, которые отсекаются, то выражение считается: $\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}$. Тогда:

$$U_{вых} = \frac{K\,A_0^2}{2}\left(1 + 2M\cos(2\pi Ft)\right) + \frac{M^2}{2}\left(1 + \cos(4\pi Ft)\right)¿ = ¿$$

¿ $\frac{K A_0^2}{2}\left(K A_0^2 2\,M cos\left(2\pi F t\right)\right)+\frac{K A_0^2}{2}\frac{M^2}{2}+\frac{K A_0^2 M^2}{4}\cos\left(4\pi F t\right)=$ ¿

¿ $0,5K A_0^2+K A_0^2 M^2\cos\left(2\pi F t\right)+0,25\,K A_0^2 M^2+0,25\,K A_0^2 M^2\cos\left(4\pi F t\right)=$ ¿

¿ $0,5K A_0^2\left(1+0,5\,M^2\right)+K A_0^2 M\cos\left(2\pi F t\right)+0,25K A_0^2 M^2\cos\left(4\pi F t\right).$

Ответ:
1. Постоянное $U_{вых}$:

$$U_{20}=0,5\,K A_0^2\left(1+0,5\,M^2\right)$$

2. Полученный сигнал:

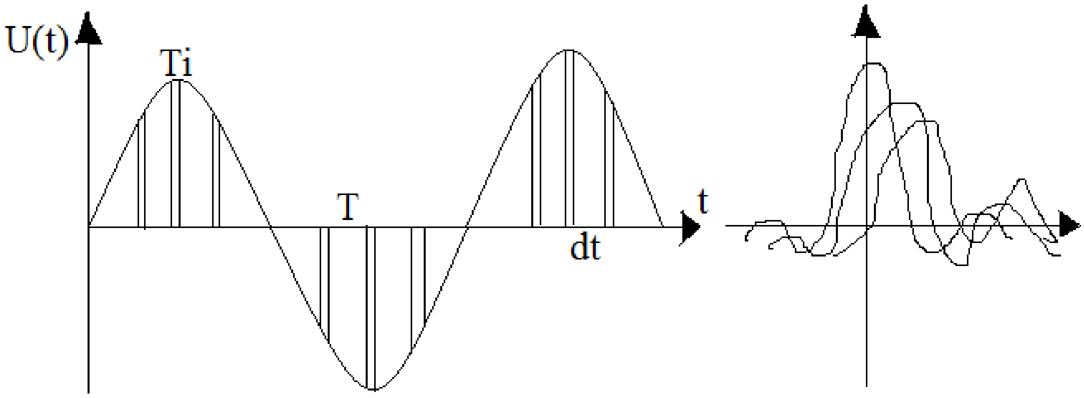
$$A\left(F\right)=K A_0^2 M$$

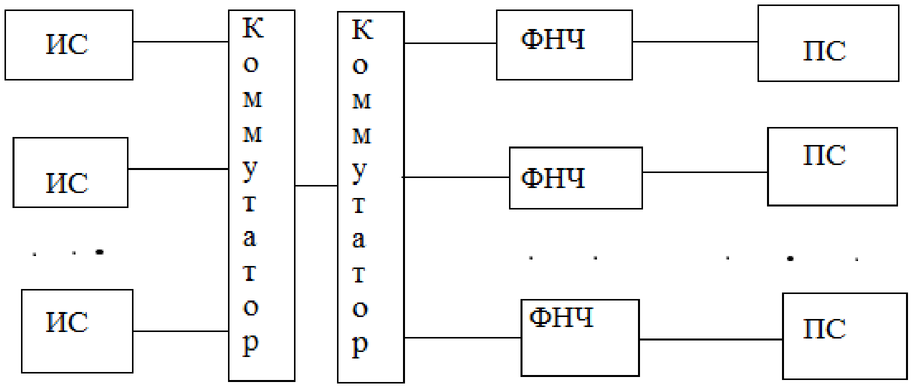
3. 2-я гармоника полезного сигнала, являющаяся результатом искажения сигнала из-за квадратичности спектра:

$$A\left(2F\right)=0,25\,K A_0^2 M$$

<u>З А Д А Ч А N 10</u>

Континуальный сигнал, спектр которого занимает полосу частот равную ΔF, стробируется последовательностью коротких прямоугольных импульсов, имеющих длительность T_i. Полученные отсчеты передаются по линии связи, полоса пропускания которой считается неограниченной.
На приемной стороне континуальный сигнал восстанавливается посредством П-образного фильтра нижних частот, имеющего полосу пропускания ΔF.
Определите максимальное значение T_{max} периода последовательности прямоугольных импульсов, при котором принятый сигнал будет полностью восстановлен. Какое предельное число корреспондентов M_{max} может одновременно передавать информацию по каналу связи при применении временного уплотнения.
==
Решение:





По теореме Котельникова, произвольный сигнал может быть полностью восстановлен, если известны отсчётные значения этого сигнала, взятые через равные промежутки времени (1/2f), где f – наивысшая частота спектра.

1. Максимальное значение T_{max} периода последовательности прямоугольных импульсов, при котором принятый сигнал будет полностью восстановлен:

$$dt = \frac{1}{2f}.\ Т.к.\ dt = T,\ то\ T = \frac{1}{2f} = T_{MAX}$$

2. Число корреспондентов M_{max} может одновременно передавать информацию по каналу связи при применении временного уплотнения:

$$M_{MAX} = \frac{dt}{T_i} = \frac{T}{T_i} = \frac{1}{2\pi f T_i}$$